INT Management 2002

Problème (15 points)

Le but de ce problème est de déterminer un équivalent de $x \mapsto \sum_{n=1}^{-\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ *lorsque* x *tend vers* 0 *par valeurs positives* .

Partie I: Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

Pour tout réel A positif, on défini le réel:

$$F(A) = \int_0^A e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du$$

où $e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)}$ désigne l'exponentielle complexe $\cos\left(\frac{u^2}{2\pi}\right) + i \sin\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)$.

1) Montrer que pour tous réels α et A strictement positifs, on a :

$$\int_\alpha^A e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\alpha^2}{2\pi}}^{\frac{A^2}{2\pi}} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt.$$

2) Montrer que l'application $t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur tout intervalle $\left]0, \frac{A^2}{2\pi}\right]$.

3) En déduire que, pour tout réel A strictement positif

$$\int_0^A e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{A^2}{2\pi}} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt.$$

4) Montrer en intégrant **par** parties, que l'application $X \mapsto \int_1^X \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ admet une limite finie lorsque X tend vers plus l'infini, en déduire que l'application $X \mapsto \int_0^X \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ admet une limite finie lorsque X tend vers plus l'infini.

On notera $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ cette limite finie.

5) En déduire que le réel $F(A)$ admet une limite finie quand A tend vers plus l'infini. on notera

$$\int_0^{\to-\infty} e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du$$

cette limite.

Partie II: Calcul de $\int_0^{\to-\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$

On appelle f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $2\pi-$périodique, définie par

$$\forall t \in [0,2\pi[\,, f(t) = e^{i\left(\frac{t^2}{2\pi}\right)}$$

1) Montrer: en rappelant le théorème utilisé, que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{int}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int} dt$$

Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{int}$?

2 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)} \int_{-\pi-n\pi}^{\pi-n\pi} e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du.$$

En déduire des expressions de $c_{2p}(f)$ et $c_{2p+1}(f)$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

3 On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f) = \sum_{p=-n}^{p=n} c_{2p}(f) + \sum_{p=-n}^{p=n} c_{2p+1}(f)$.

a) Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi(2n+1)} e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du\right) - \frac{i}{2\pi}\left(\int_0^{\pi(2n+2)} e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du + \int_0^{\pi(2n)} e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du\right)$$

b) En déduire que:

$$\int_0^{\to+\infty} e^{i\left(\frac{u^2}{2\pi}\right)} du = \frac{\pi}{2}(1+i)$$

4) Montrer à l'aide des questions précédentes que:

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie III: Convergence de la série $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ pour $x > 0$.

1) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ U_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \sin px$.

En remarquant que $U_n(x) = \Im\left(\sum_{p=0}^{n} e^{ix}\right)$, donner une expression simple de $U_n(x)$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, |U_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

3) En remarquant que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \sin px = U_p(x) - U_{p-1}(x)$ et en posant $U_0(x) = 0$. montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{p=n+1}^{n-m} \frac{\sin px}{\sqrt{p}}\right| \leqslant \frac{2}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \sqrt{n}}$$

4) En déduire que la série $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout intervalle $[a,b]$ strictement inclus dans $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

Partie IV: Équivalent Ge $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

A

1) Soit $x > 0$, montrer, en utilisant la partie 1, que l'application $X \mapsto \int_0^X \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} dt$ admet une limite finie lorsque X tend vers plus l'infini' on noiera $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} dt$ cette limite.

2) En déduire l'expression de $h(x)$ en fonction de x.

B

Pour tout réel x strictement positif, on note $N(x) = \left[\frac{1}{x^2}\right]$, où $\left[\frac{1}{x^2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{1}{x^2}$, c'est à dire le nombre entier $N(x)$ vérifiant l'inégalité:

$$N(x) \leqslant \frac{1}{x^2} < N(x) + 1$$

1) Montrer à l'aide la partie III que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \left|\sum_{p=N(x)+1}^{+\infty} \frac{\sin px}{\sqrt{p}}\right| \leqslant \frac{2}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}.$$

En déduire que l'application $x \mapsto \sum_{p=N(x)+1}^{+\infty} \frac{\sin px}{\sqrt{p}}$ est bornée sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

2) Montrer, en intégrant par parties, que

$$\forall x > 0,\ \left| \int_{N(x)}^{+\infty} \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} dt \right| \leqslant \frac{2}{x\sqrt{N(x)}}$$

En déduire que l'application $x \mapsto \int_{N(x)}^{+\infty} \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} dt$ est bornée sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

3) On note pour tout $x > 0$. $W(x) = \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \int_0^{N(x)} \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} dt$

a) Montrer que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} dt$ est bornée suï $[0,1]$.

b) Montrer que l'application $x \mapsto \frac{\sin(N(x)x)}{\sqrt{N(x)}}$ est bornée sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

c) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$

$$W(x) = \sum_{n=1}^{N(x)-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} \right) dt + \frac{\sin(N(x)x)}{\sqrt{N(x)}} - \int_0^1 \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} dt$$

d) Pour tout réel u strictement positif, on note $G_n(u) = \int_n^u \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \frac{\sin xt}{\sqrt{t}} \right) dt$

α) En appliquant la formule rie Taylor Lagrange à l'ordre 2 entre n et $n+1$ à la fonction G_n, montrer qu'il existe :

$$c_n \in]n, n+1[\ ,\ G_n(n+1) = \frac{1}{2}\left(-x\frac{\cos xc_n}{\sqrt{c_n}} + \frac{\sin xc_n}{2c_n\sqrt{c_n}} \right).$$

β) En déduire que : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|G_n(n+1)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n\sqrt{n}} \right)$

γ) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$. en déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right],\ \sum_{n=1}^{N(x)-1} \frac{x}{\sqrt{n}} \leqslant x + x\int_1^{N(x)-1} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

δ) Montrer que l'application $x \mapsto W(x)$ est bornée au voisinage de zéro pour $x > 0$.

e) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \underset{\substack{x \to 0 \\ x>0}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Exercice (5 points)

Préliminaires : On utilisera sans démonstration la propriété suivante :
Pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que :

$B = P^{-1}TP$, les éléments diagonaux de T sont les valeurs propres de B.

A désigne une matrice carrée d'ordre $n > 0$ à coefficients complexes de rang égal à 2.

1) Montrer que le polynôme caractéristique P_A de A vérifiant $P_A(X) = \det(A - XI_n)$ est de la forme $P_A(X) = Q(X)(-X)^{n-2}$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2.
2) On désigne par λ_1 et λ_2 les racines complexes du polynôme Q.

   a) Montrer en utilisant les préliminaires que λ_1 et λ_2 vérifient le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = trA \\ \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{(trA)^2 - tr(A^2)}{2} \end{cases}$$ où trA désigne la trace de la matrice A.

   b) En déduire que $Q(X) = X^2 - (trA)X + \dfrac{(trA)^2 - tr(A^2)}{2}$

3) On suppose $tr(A^2) = (trA)^2$.
   Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4) On suppose $tr(A^2) \neq (trA)^2$.

   a) Montrer que si $2tr(A^2) - (trA)^2 \neq 0$ alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   b) On suppose maintenant $2tr(A^2) - (trA)^2 = 0$.

      α) Montrer que si A est diagonalisable alors la famille (A, A^2) est liée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
      β) Étudier la réciproque.
